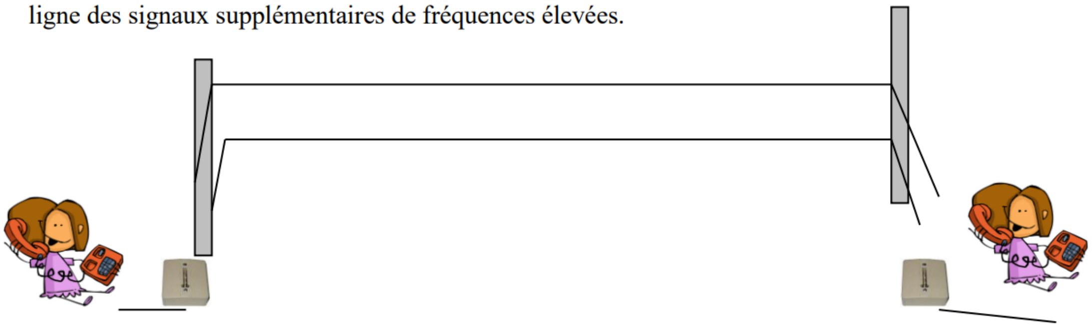
Thème : Dynamique d'un système électrique
Cours 24 : Intensité électrique – Etude d'un condensateur
(version élèves)

B.O. Étudier la dynamique d'un système électrique.
Intensité d'un courant électrique en régime variable.
Comportement capacitif.
Modèle du condensateur. Relation entre charge et tension ; capacité d'un condensateur.
Modèle du circuit RC série : charge d'un condensateur par une source idéale de tension, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.
Capteurs capacitifs.

I. Un exemple d'application d'un circuit RC : le filtrage des lignes téléphoniques

Lors d'un appel téléphonique, l'utilisateur crée, par l'intermédiaire du micro, un signal électrique de fréquence comprise entre 300 et 4000 Hz (fréquence audibles). Une ligne téléphonique transporte ces signaux. Mais, à cause de parasitages (ondes électromagnétiques …), on retrouve également sur la ligne des signaux supplémentaires de fréquences élevées.



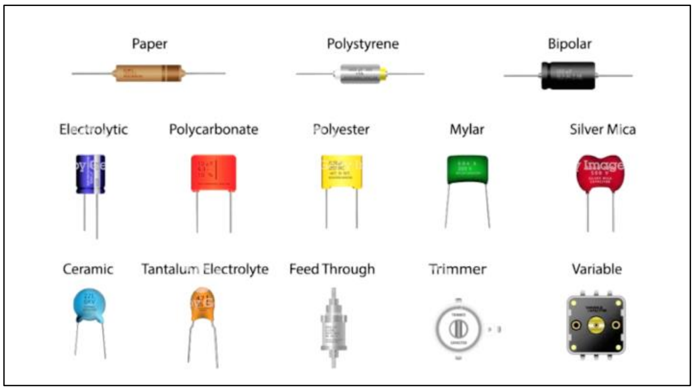
Or, pour l'autre utilisateur (en réception), seuls les signaux de fréquences audibles sont nécessaires. Les signaux parasites peuvent éventuellement dégrader la qualité de la communication.

Source : http://www4.ac-nancy-metz.fr/cpge-pmf-epinal/Cours_TD_SII/Elec/cours_filtrage.pdf

Un filtre est un circuit dont le comportement dépend de la fréquence du signal d'entrée. Il permet de privilégier ou d'éliminer certaines fréquences d'un signal.
Un **circuit RC** est un circuit électrique, l'un des filtres les plus simples, composé d'une résistance et d'un condensateur généralement associés en série, alimenté par une source de tension.

Nous allons étudier dans ce cours comment faire varier le temps de charge ou de décharge d'un condensateur dans un circuit RC série.

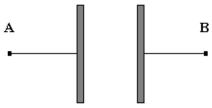
II. Les condensateurs.



1. Définition.

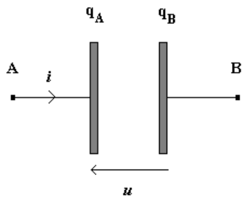
Un condensateur plan est constitué de deux armatures dont les surfaces en regard sont séparées par un isolant électrique.

Représentation symbolique :



2. Orientation d'un circuit en utilisant la convention récepteur.

Si q_A est la charge de l'armature A et q_B celle de l'armature B, on a : $q_A = -q_B$ $q_A > 0$



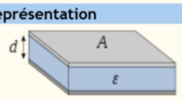
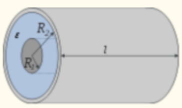
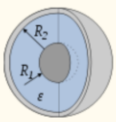
En convention récepteur, la flèche tension est orientée vers l'armature où arrive le courant.

3. Capacité d'un condensateur C .

La capacité d'un condensateur est définie par la relation entre la tension u aux bornes du condensateur et la charge Q que porte d'une de ses armatures : $Q = C.u$
Soit $C = \frac{Q}{u}$
Elle s'exprime en Farad (F).
Pratiquement, la capacité informe sur l'aptitude du condensateur à accumuler de l'énergie lorsqu'il est soumis à une tension continue.

4. Influence de la géométrie des armatures d'un condensateur sur sa capacité.

Aucune relation n'est à connaître !

Désignation	Capacité	Représentation
Condensateur plan	$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$	
Condensateur cylindrique	$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$	
Condensateur sphérique	$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$	

ε_r est la permitivité relative du matériau.
ε_0 est la permitivité du vide.
$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}

On choisit comme permittivité relative du vide, la valeur 1, par convention.
Ex : la permittivité relative de l'eau est 78,5

La permittivité d'un matériau donne une indication sur son aptitude à réduire les forces électrostatiques qui s'exerce.
C'est pour cela, que l'eau est un bon solvant !

5. Relation charge-intensité.

La charge q du condensateur évolue au cours du temps.
Lors de la charge du condensateur, q augmente.
Ce débit de charge correspond à l'intensité i.

Charge du condensateur : $i = \dfrac{dq}{dt}$ $i > 0$ En convention récepteur

Décharge du condensateur : $i = \dfrac{dq}{dt}$ $i < 0$

i est une grandeur algébrique.

Quand q ne varie pas, l'intensité est nulle. Le condensateur se comporte comme un isolant.

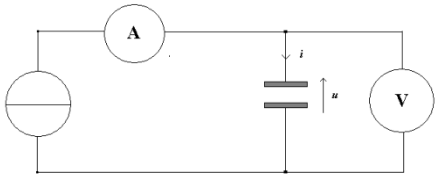
q : charge de l'armature unité : Coulomb (C)
i : intensité unité : Ampère (A)
t : temps unité : seconde (s)

6. Relation charge-tension.

4.1. Montage d'étude de la charge d'un condensateur à courant constant.

Afin d'établir la relation charge tension il faut s'affranchir de l'intensité qui doit rester constante.
Pour cela, on utilise un générateur idéal de courant.

L'intensité du courant est fixée à i = 15,0 μA



On relève les valeurs de la tension à différentes dates.
Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

t (s)	0	0,67	1,25	1,77	2,20	2,76	3,23	3,78	4,32
u (V)	0	2,04	3,79	5,44	6,73	8,41	9,82	11,5	13,1

Question :

- Tracer le graphe $u = f(t)$
- Que constatez-vous ?
- Sachant que pour une valeur constante de l'intensité i, on a $q = i.t$, compléter le tableau suivant :

t (s)	0	0,67	1,25	1,77	2,20	2,76	3,23	3,78	4,32
u (V)	0	2,04	3,79	5,44	6,73	8,41	9,82	11,5	13,1
q (C)									

- Tracer le graphe $q = f(u)$
- Etablir alors la relation entre la charge q et la tension u-tension.
- Le coefficient directeur est appelé capacité C du condensateur. Son unité est le Farad (F).
  Quelle est la valeur de C ?

<u>Réponse</u> :

Graphe $u = f(t)$

On constate que la charge est une fonction linéaire de la tension.
q = constante $\times u$
la relation charge-tension est : $q = Cu$
Le coefficient directeur est égal à ………………………………
Le coefficient directeur de cette droite est appelée capacité du condensateur C = …………………………… F (unité : Farad)

III. Dipôle RC.

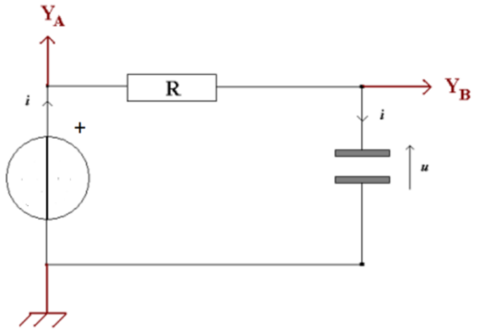
1. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension.

Un échelon de tension correspond au passage rapide d'une valeur de tension u = 0 à une valeur u = E.

1.1. Montage d'un dipôle RC alimenté par un générateur de tension continue idéal

Idéal : le générateur délivre une tension constante quel que soit la valeur de l'intensité dans le circuit – il n'a pas de résistance interne.

On réalise le montage suivant :



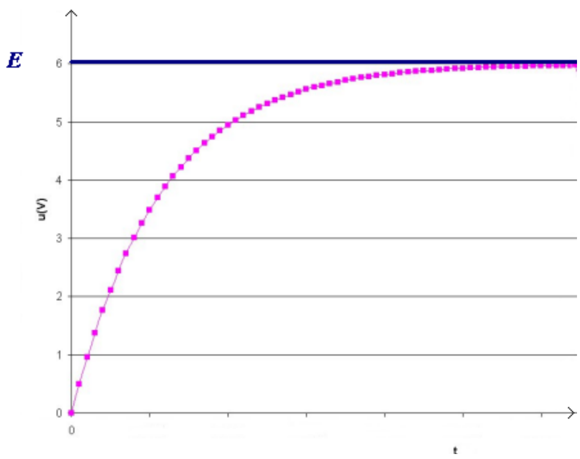
R = 100 Ω
C = 0,12 μF

Astuce : pour **mesurer à la fois** la tension E aux bornes du GBF et du condensateur u pour placer correctement les bornes de l'oscilloscope.

- Placer dans un premier temps la masse entre ces deux composants.
- Placer ensuite les deux bornes de mesures Y_A et Y_B de l'autre côté des composants.

Ainsi orienté, la tension u est positive.

1.2. Oscillogramme obtenu.



E : la tension continue aux bornes du générateur.
u : la tension aux bornes du condensateur

Question :

La tension aux bornes du condensateur est-elle constante ou variable / continue ou discontinue ?

Réponse :

1.3. Comment procéder pour visualiser l'intensité circulant dans le circuit à l'aide de l'oscilloscope ?

Aux bornes de la résistance, la loi d'ohm s'énonce ainsi $u_R = Ri$.
Il suffit de mesurer la tension u_R afin de visualiser l'intensité i.

La valeur de i est $i = \frac{u_R}{R}$

1.4. La constante de temps τ d'un dipôle RC.

<u>Définition</u>.

La constante de temps est la durée nécessaire pour atteindre 63% de la tension maximale lors de la charge et 37% de la tension maximale lors de la décharge.
La constante de temps a pour expression $\tau = R.C$ pour un circuit RC. Elle s'exprime en seconde.

<u>Vérification</u> de l'unité de la constante de temps par analyse dimensionnelle.

L'analyse dimensionnelle consiste à écrire une équation aux dimensions.
On cherche à exprimer la dimension de R et de C en fonction des dimensions de l'intensité, de la tension et du temps.

- D'après la loi d'Ohm on a $u = Ri$ soit $R = \frac{u}{i}$

  La dimension de R s'écrit $[R] = \left[\frac{U}{I}\right] = \frac{[U]}{[I]}$ (1)

- A partir de la définition de l'intensité du courant électrique, on a $i = \frac{dq}{dt}$

  La dimension de la charge s'écrit $[Q] = [I] \times [T]$ (2)

- A partir de la relation $q = C.u$

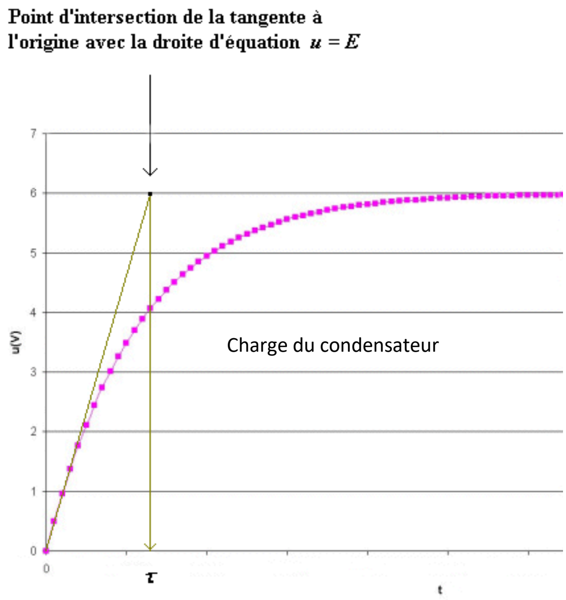
  La dimension de la capacité s'écrit $[C] = \frac{[Q]}{[U]}$,
  En utilisant la relation (2) on a $[C] = \frac{[I]\cdot[T]}{[U]}$
  La dimension $[RC] = [R] \times [C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]}{[U]} \times [T]$
  Soit après simplification $[RC] = [T]$
  La constante de temps a la dimension d'un temps.
  Son unité est la seconde (s).

<u>Détermination</u> graphique de la constante de temps.

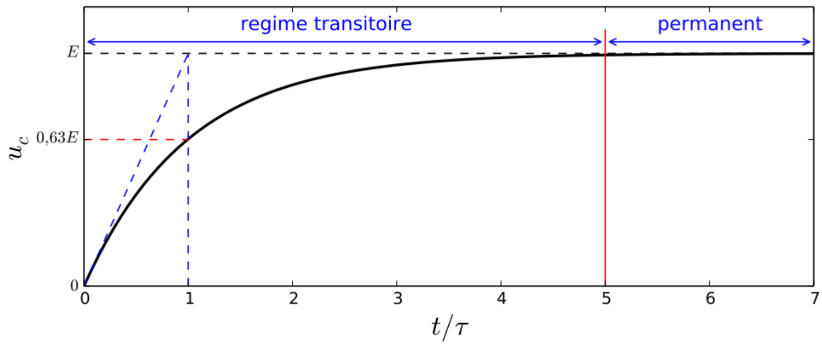
Détermination graphique de τ dans le cas de la charge du condensateur

Méthode :

- On trace la tangente à l'origine 0
- On détermine le point d'intersection de cette tangente avec la droite d'équation *u* = *E*
- On projette orthogonalement ce point sur l'axe des abscisses.



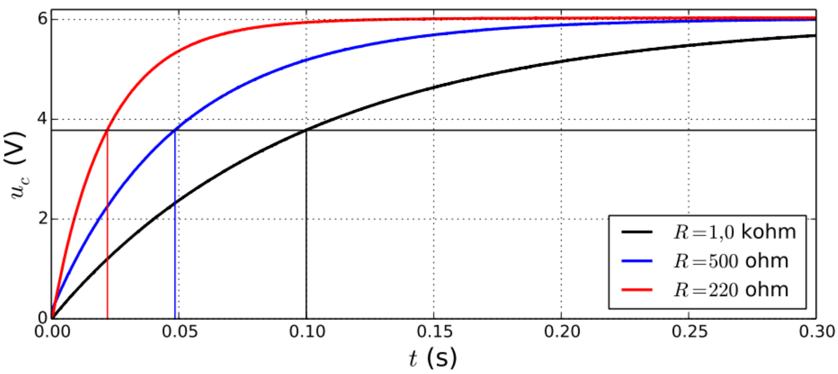
Régime transitoire et régime permanent :



Au bout d'une durée de **5**τ, on considère que la charge est complète (99%).
Le régime est dit permanent, c'est-à-dire que la tension est constante et que l'intensité circulant dans le circuit est nulle.

Temps (s)	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
u_C (t)	63% de E	86% de E	95% de E	98% de E	99% de E

Influence de la valeur de la résistance *R* sur la charge d'un condensateur :

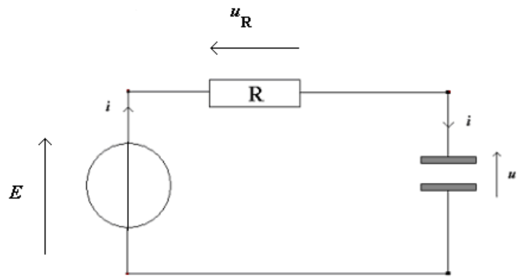


<u>Question</u> : Interpréter les graphiques ci-contre et conclure quant à l'influence de la valeur de la résistance sur la durée de charge du condensateur.

<u>Réponse</u> :

1.5. Résolution analytique de la charge du condensateur.

1.5.1. Etablissement de l'équation différentielle de charge du condensateur.



La méthode d'établissement de l'équation différentielle est la suivante :

- Ecrire la loi d'additivité des tensions.
- Exprimer *i* en fonction de *u* afin d'obtenir une équation ne comportant que des expressions de tensions.

On applique la loi d'additivité des tensions : $E = u_R + u(t)$

$\Leftrightarrow E = R.i(t) + u(t)$ avec la loi d'Ohm : $u_R = Ri$

$\Leftrightarrow R \cdot \frac{dq_{(t)}}{dt} + u(t) = E$ avec $i = \frac{dq}{dt}$

$\Leftrightarrow R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u(t) = E$ avec $q = C.u_c(t)$

L'équation différentielle peut donc s'écrire :
$R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u(t) = E$

1.5.2. Résolution de l'équation différentielle d'ordre 1 avec second membre

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche à déterminer l'expression de la tension *u*(*t*) qui vérifie l'équation $R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E$

<u>La solution de cette équation différentielle correspond à la somme d'une solution générale et d'une solution particulière</u>.

La résolution s'effectue donc en deux étapes :

Etape n° 1 : Résolution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$ pour trouver la solution générale qui correspond au régime transitoire, c'est-à-dire quand le condensateur se charge.

L'équation différentielle peut s'écrire : $\frac{\frac{d(u_c(t))}{dt}}{u_c(t)} = -\frac{1}{RC}$ alors $\frac{d(u_c(t))}{u_c(t)} = -\frac{1}{RC} \cdot dt$

Si deux expressions sont égales alors leurs primitives par rapport à *t* sont égales à une constante près.

La solution générale en régime transitoire s'écrit : $u(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ ou encore $u(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec τ = RC
K est une constante à déterminer.

$\Leftrightarrow \ln(|u_c(t)|) = -\frac{1}{RC} \cdot t$ + constante
$\Leftrightarrow e^{[\ln(|u_c(t)|)]} = e^{[-\frac{1}{RC} \cdot t + constante]}$
$\Leftrightarrow |u_c(t)| = e^{[-\frac{1}{RC} \cdot t]} \cdot e^{[constante]}$

Rappels mathématiques :

si $f(x)$) = 5x +2 alors $f'(x)$ = 5

Réciproquement
si $f'(x)$ = 5 alors $f(x)$) = 5x +K
K étant une constante à déterminer.

La primitive de $\frac{1}{x}dx$ est $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + K$
$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + K \; si \; x \neq 0$

On appelle K la constante correspondant à $e^{[constante]}$ et τ la constante caractéristique d'expression τ = RC
On peut donc écrire que la solution générale a pour expression $u_c(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
Etape n°2 : Détermination de la solution particulière de l'équation complète $R \cdot C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} + u_c(t) = E$

La solution particulière de l'équation $R \cdot C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} + u_c(t) = E$ correspond au moment où la tension est constante
C'est-à-dire que $\frac{d(u_c(t))}{dt} = 0$ (régime permanent)
La tension a atteint alors sa valeur maximale quand $t \rightarrow \infty$.
$u_c(t) = constante$ alors $i = C \cdot \frac{d(u_c(t))}{dt} = 0$
Donc $R \cdot i = 0$ soit $u_c(t) = E$

La solution particulière de l'équation différentielle est donc égale à E

La solution de l'équation différentielle correspondant à la somme de la solution générale et de la solution particulière est $u_c(t) = E + K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
Il reste à déterminer la constante K.

Détermination de la constante K par les conditions initiales

On se place dans les <u>conditions initiales</u> : à t = 0 on a $u(0)$ = 0
$\Leftrightarrow E + K \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = 0$
$\Leftrightarrow E + K = 0$ avec $e^{-\frac{0}{\tau}}$ = 1
$\Leftrightarrow K = -E$

La solution complète de l'équation différentielle est donc : $\boldsymbol{u(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$
$\Leftrightarrow u(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

<u>Question</u> : Déterminer la valeur de la tension $u(t)$ quand t = τ sachant que E = 1,0 V

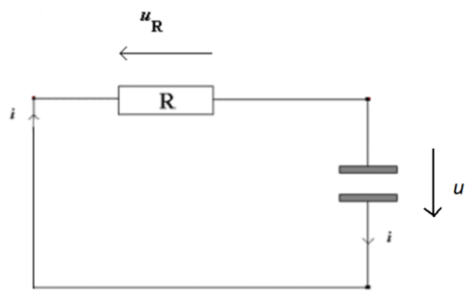
<u>Réponse</u> :

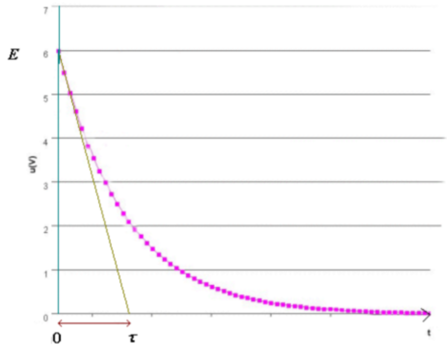
Question : Justifier le fait que l'on peut considérer que le condensateur est complètement chargé quand $t = 5\tau$

Réponse :

1.6. Résolution analytique de la décharge d'un condensateur.

Pour décharger le condensateur, on fait basculer l'interrupteur de telle manière à ce que le circuit se réduise au circuit suivant :





Point d'intersection de la tangente à l'origine E avec la droite d'équation $u = 0$

Temps (s)	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
u_C (t)	37% de E	14% de E	5% de E	2% de E	1% de E

Questions :

- Montrer que l'équation différentielle de la décharge d'un condensateur est $\boldsymbol{R \cdot C \cdot \frac{du_{(t)}}{dt} + u(t) = 0}$
- Montrer que la solution de cette équation différentielle est : $\boldsymbol{E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$

Réponses :

La méthode d'établissement de l'équation différentielle est la suivante :

- Ecrire la loi d'additivité des tensions.
- Exprimer *i* en fonction de *u* afin d'obtenir une équation ne comportant que des expressions de tensions.

On applique la loi d'additivité des tensions :

L'équation différentielle peut donc s'écrire :

1.5.2. Résolution de l'équation différentielle.

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche à déterminer l'expression de la tension *u*(*t*) qui vérifie l'équation $R \cdot C \cdot \frac{du_{C(t)}}{dt} + u_{C(t)} = 0$

La résolution s'effectue en **une** étape (car il n'y a pas de solution particulière dans ce cas).

Résolution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $R \cdot C \cdot \frac{du_{C(t)}}{dt} + u(t) = 0$

La solution complète de l'équation différentielle est donc :

Classe inversée :

1. Identifier des situations variées où il y a accumulation de charges de signes opposés sur des surfaces en regard.
2. Donner des exemples de capteurs capacitifs.